المملكة الأردنية الهاشمــية

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(2021/10/5944)

إثبات

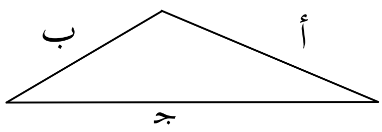
نظرّية أبولونيس (APOLLONIUS)

بالرّياضيّات الأساسيّة (التقليديّة أم البسيطة)

BASIC MATHMATICS .

النّظريّة رسمًا لأيّ مثلّث :

الشّكل ١ :



فإنَّ :

أ × جـ : مساحة مستطيل الضّلع أ ؛

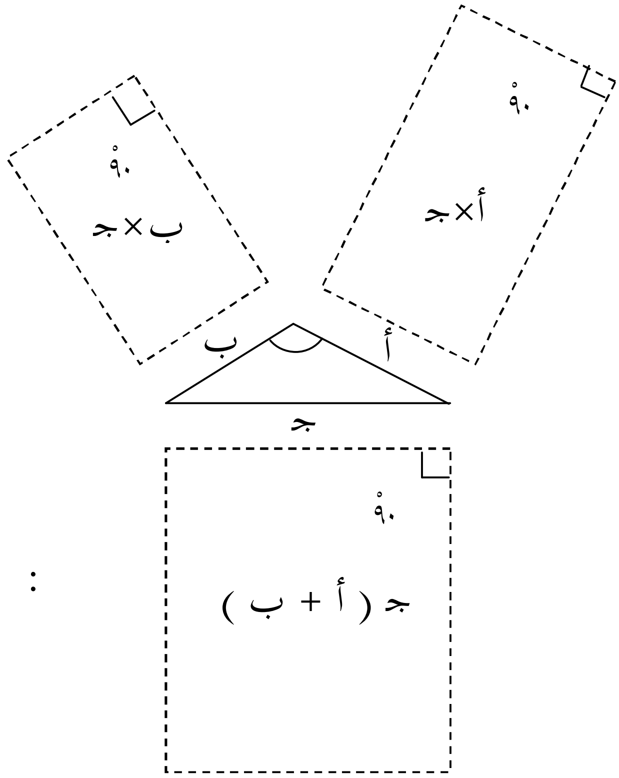
ب × جـ : مساحة مستطيل الضّلع ب ؛

جـ (أ+ب) : مساحة مستطيل الضّلع جـ .

جـ = أ + ب ..... العلاقة ١ ؛ علاقة مستطيلة ،

كلٌّ من مساحة الأضلاع أ ، ب ، جـ : مستطيلة الشّكل .

كالتّالي :



الشّكل ٢ :

بإعادة هيكلة مساحات المستطيلات ليساوي كلٌّ منهم مساحة مربّع ،

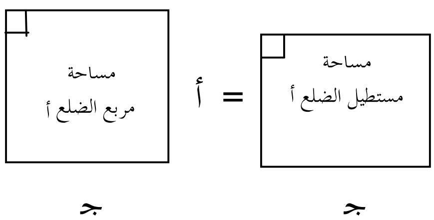
فيكون : مساحة المستطيل أ × ج = مساحة المربّع أ^{٢} ،

مساحة المستطيل ب × ج = مساحة المربّع ب^{٢} ،

مساحة المستطيل ج (أ + ب) = مساحة المربّع ج^{٢} ،

كالتّالي :

أ × ج = أ



= أ

الشّكل ٣ :

$$\text{١ : } \text{أ} \times \text{جـ} = \left(\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{٢}\right)^{٢} - \left(\text{جـ} - \left(\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{٢}\right)\right)^{٢} \text{ ،}$$

$$= \left(\frac{\text{أ} \cancel{+} \text{جـ}}{٢}\right)^{٢} - \left(\text{جـ}^{٢} - \cancel{٢}\text{جـ}\left(\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\cancel{٢}}\right) - \left(\frac{\text{أ} \cancel{+} \text{جـ}}{٢}\right)^{٢}\right)$$

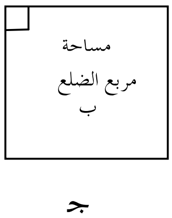
$$= - \cancel{\text{جـ}^{٢}} + \text{أ} \times \text{جـ} + \cancel{\text{جـ}^{٢}}$$

فبذلك : $\text{أ} \times \text{جـ} = \text{أ} \times \text{جـ}$

لكن : $\text{أ} = \text{جـ} \Leftarrow \text{أجـ} = (\text{أ})^{٢}$ ....معادلة ١ .

$\text{ب} \times \text{جـ} = \text{ب}$

$= \text{ب}$



: الشّكل ٤

$$\text{٢ : } \text{ب} \times \text{جـ} = \left(\frac{\text{ب} + \text{جـ}}{٢}\right)^{٢} - \left(\text{جـ} - \left(\frac{\text{ب} + \text{جـ}}{٢}\right)\right)^{٢} \text{ ،}$$

$$= \left(\frac{\text{ب} \cancel{+} \text{جـ}}{٢}\right)^{٢} - \left(\text{جـ}^{٢} - \cancel{٢}\text{جـ}\left(\frac{\text{ب} + \text{جـ}}{\cancel{٢}}\right) - \left(\frac{\text{ب} \cancel{+} \text{جـ}}{٢}\right)^{٢}\right)$$

$$= - \cancel{\text{جـ}^{٢}} + \text{ب} \times \text{جـ} + \cancel{\text{جـ}^{٢}}$$

فبذلك :

$\text{ب} \times \text{جـ} = \text{ب} \times \text{جـ}$

لكن : ب = جـ ⇐ ب × جـ = (ب)^{٢} ......معادلة ٢ .

جـ (أ+ب) = جـ
مساحة مستطيل الضلع جـ
أ + ب

= جـ
مساحة مربع الضلع جـ
(أ + ب)

: الشّكل ٥

$$٣ : \text{(أ+ب)} \times \text{جـ} = \left(\frac{\text{أ+ب + جـ}}{٢}\right)^{٢} - \left(\text{(أ+ب)} - \frac{\text{أ+ب + جـ}}{٢}\right)^{٢}$$

$$= \left(\frac{\text{أ+}\cancel{\text{ب}}\text{ + جـ}}{\cancel{٢}}\right)^{٢} - \left(\text{(أ+ب)}^{٢} - \cancel{(٢)}\text{(أ+ب)}\frac{\text{(أ+ب + جـ)}}{\cancel{٢}} + \left(\frac{\text{أ+}\cancel{\text{ب}}\text{ + جـ}}{\cancel{٢}}\right)^{٢}\right)$$

$$= - \left(\text{(أ+ب)}^{٢} + \text{(أ+ب) (أ+ب + جـ)}\right) = \text{(أ+ب) جـ}$$

فبذلك : (أ + ب) × جـ = (أ + ب) جـ

لكن : (أ+ب) = جـ ⇐ (جـ)^{٢} = جـ (أ + ب)...معادلة ٣ .

بجمع المعادلة ١ ، والمعادلة ٢

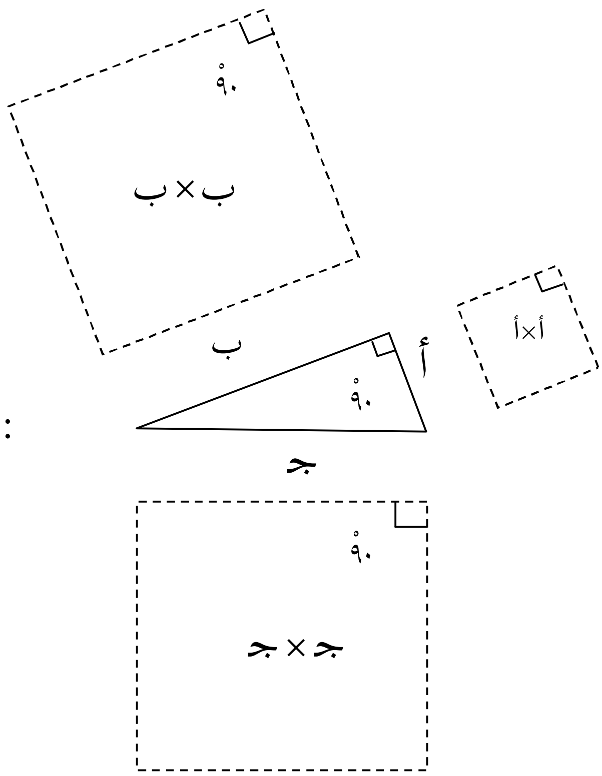
$$\text{(أ)}^{٢} = \text{أجـ}$$

$$\underline{\text{(ب)}^{٢} = \text{ب جـ}}$$

(أ)^{٢} + (ب)^{٢} = جـ (أ + ب) ... معادلة ٤ .

فنحصل على مثلّث قائم الزّاوية عامًا كالتّالي :

رسمًا :



الشّكل ٦ :

لكن : $(ج)^{٢}$ = جـ (أ + ب) .... فرع ٣.

وبتعويض (جـ $)^{٢}$ = جـ (أ + ب) بالمعادلة ٤ ؛

نحصل على معادلةٍ لمثلّثه ألا وهيَ :

$(ج)^{٢}$ = $(أ)^{٢}$ + $(ب)^{٢}$ ..... معادلة ٥ .

مربّع الضّلع (جـ) = مربّع الضّلع(أ)مجموعًا إليه مربّع الضّلع(ب) .

فتصبح العلاقة المستطيلة : جـ = أ + ب ؛

علاقة تربيعيّة كالتّالي :

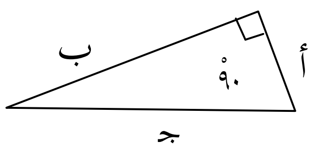
جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} علاقة تربيعيّة .... معادلة ١ ، ٢ ، ٣ ؛

متقدّمة بها إجراءات الرّياضيّات الأساسيّة ، مقدّمة إجراءها بعلاقة مسستطيلة عامة لأيّ مثلّث (بما في ذلك المثلّث القائم الزّاوية) وأخرى علاقة مربّعيّة (تربيعيّة) للمثلّث القائم الزّاوية .

فتصبح العلاقة : جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} صحيحة للتّطبيق على مثلّث القائم الزّاوية ، مقدمة إجراءات الرّياضيّات الأساسيّة إياها نظريًّا ؛

كالتّالي :

العلاقة رسمًا :



: الشّكل ٧

العلاقة معادلة : جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} ...... العلاقة أ

العلاقة نصًا : ناتج مربّع الضّلع الواحد من الضلعين المقابلين للوتر بالمثلّث القائم الزّاوية ، مجموعًا إليه مربّع الضّلع الأخر يساوي ناتج مربّع ضلع الوتر بمثلّثهما .وبأنّ إجراءات الرّياضيّات الأساسيّة الّتي عَنينا بها بما سبق لإنتاج صحّة النّظريّة ، هي الإجراءات الّتي بها عَنيت الرّياضيّات

الأساسيّة لتحصيل العلاقة أ ؛

وهنالك فارق ما بين تطبيق إجراءات الرّياضيّات الأساسيّة لتحصيل العلاقة أ وصحتها ، السّابق متبعًا بهم لأيّ مثلّث ؛ وبين تطبيق إجراءات الرّياضيّات الأساسيّة على العلاقة أ حاصلة للمثلّث القائم الزّاوية لإثبات صحتها ، والسّابق ذكرها تحصيلًا وصحةً للتّطبيق .

ولمعرفة الفارق بين التّطبيقين ، نطبّق على شكل ٧ إجراءات الرّياضيّات الأساسيّة الّتي أجريناها عامًّا لأيّ مثلث شكل ١ كاملة إلى معادلة ٤ ؛ حيث :

أ × جـ : مساحة مستطيل الضلع أ ؛

ب × جـ : مساحة مستطيل الضلع ب ؛

جـ (أ +ب) : مساحة مستطيل الضلع جـ .

فبأنَّ : مساحة ضلع المستطيل جـ = مساحة ضلع المستطيل أ + مساحة ضلع المستطيل ب ؛ وذلك :

إمّا بإعادة هيكلة كلٍّ من مساحات مستطيلاتهم الثّلاثة ، لتكون مساحة هيكل المستطيل الواحد من مستطيلاتهم تساوي هيكل مساحة مربّعٍ ، كما بفرع ١ ،٢ ، ٣ : صفحة ١ ،٢ ، ٣ ، ٤ .

أو بأخذ الجذر التّربيعيّ لمساحة الضّلع الواحد من أضلاع المستطيلات

الثّلاثة ، مباشرة ، حيث فرع ١ ،٢ ، ٣ : صفحة ١ ،٢ ، ٣.

كل فرع منهم يساوي الجذر التّربيعيّ لمساحة ضلعه كالتّالي :

$$١ : \text{أ} \times \text{جـ} = \left(\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{٢}\right)^{٢} - \left(\text{جـ} - \left(\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{٢}\right)\right)^{٢} = \sqrt{\text{أ} \times \text{جـ}}$$

$$٢ : \text{ب} \times \text{جـ} = \left(\frac{\text{ب} + \text{جـ}}{٢}\right)^{٢} - \left(\text{جـ} - \left(\frac{\text{ب} + \text{جـ}}{٢}\right)\right)^{٢} ، = \sqrt{\text{ب} \times \text{جـ}}$$

$$٣ : (\text{أ}+\text{ب}) \times \text{جـ} = \left(\frac{\text{أ}+\text{ب} + \text{جـ}}{٢}\right)^{٢} - \left((\text{أ}+\text{ب}) - \left(\frac{\text{أ}+\text{ب} + \text{جـ}}{٢}\right)\right)^{٢}$$

$$= \sqrt{(\text{أ}+\text{ب}) \times \text{جـ}}$$

فنحصل على مثلّث قائم الزّاوية ،

الضّلع الواحد من أضلاعه ضلعٌ من هيكل مربّعه الّذي بالأصل هيكل أضلاعه تربيعيّة ، تربيعه يساوي مساحة مستطيل أضلاعه بعد إعادة هيكلتهم من هيكلتهم التّربيعيّة بمثلثهم الأصل شكل ٧ إلى هيكلتهم التّربيعيّة الأخرى بمثلثهم القائم الزّاوية ؛ بفارق بطول أضلاعه ، وذلك بسبب تطبيق العلاقة المستطيلة على مثلّث قائم الزّاوية ، رغم وجود العلاقة التّربيعيّة لتطبيقها على هيكل أضلاعه التّربيعيّة صفحة ٦ ، وبصحة منتجه علاقة عامّةً للمثلّث القائم الزّاوية

لتطبيقها على هيكل أضلاعه التّربيعيّة ؛ صفحة ٦ ،

فتصبح المعادلة : ج = أ + ب .... المعادلة ٤ ، السّابقة ،

معادلة لمساحة كلٍّ من الأضلاع ج ، أ ، ب هيكل مساحة الضّلع

الواحد فيهم تربيعيّة كالتّالي :

ج^{٢} = أ^{٢}+ ب^{٢} .... المعادلة ٥ . .... نتاجها بالرّياضيّات

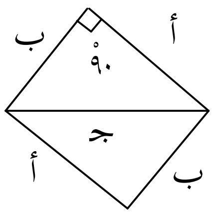
الأساسيّة ؛

الإثبات

بتكميل الشّكل ٧ ، بشكله الكامل مستطيلًا

كالتّالي :

: الشّكل ٨

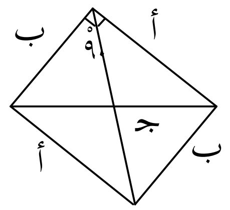


ينتج التّالي :

ج : قطر من قطرين المستطيل ، وبتطبيق الرسم على

الشّكل بطريقتين .

التّطبيق١ : برسم القطر الثّاني للمستطيل :



: الشكل ٩

فينتج التّالي :

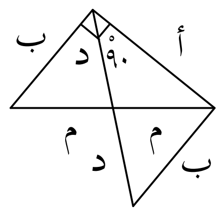
مستطيل فيه القطرين متساويين ينصف كلٌّ منهما الأخر ؛ ونسمي

كلٌّ قسم من قسمين القطر جـ : بـــ م

وكلٌّ قسم من قسمين القطر الأخر : بـــ د

وبالنّظر إلى قطعين المثلّث أ ، ب ، جـ ....شكل ٩

كالتّالي:



: الشكل ١٠

$$أ^{٢} + ب^{٢} = (\ ٢م\ )^{٢}$$ ...... المعدلة ٦.

$$أ^{٢} + ب^{٢} = (\ ٢د\ )^{٢}$$ ...... المعدلة ٧.

وبجمع المعادلة ٦، والمعادلة ٧

$$٢أ^{٢} + ٢ب^{٢} = ٤م^{٢} + ٤د^{٢}$$

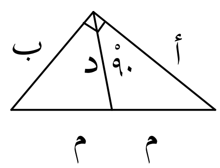
وبقسمة النّاتج على إثنين نحصل على :

أ^{٢} + ب^{٢} = ٢م^{٢} + ٢د^{٢} ...... المعدلة ٨ .

وبما أنّ المثلّث أ ، ب ، ج قائم الزّاوية ، وهو نتاج تطبيق الرّياضيّات الأساسيّة من البداية على أيّ مثلّث شكل ١، لا ينفي صحّة تطبيق المعادلة ٨ على أيّ مثلّث ، فالمعادلة هي نتاج تطبيقات ما سبقها وهي عامّة ، فنحصل على نظريّة عامّة متقدّمة بها الرّياضيات الأساسيّة لأيّ مثلّث بما في ذلك المثلّث القائم الزّاوية ومن الممكن تسمية إجراءاتها السّابقة بالأبولّونسيات ؛ كالتّالي :

نظرية أبولونيس (APOLLONIUS)

النّظريّة رسمًا:



: الشكل ٨

النّظريّة معادلةً : أ^{٢}+ ب^{٢}= ٢م^{٢} +٢د^{٢} .

النّظريّة نصًا : بأيّ مثلّث (بما في ذلك المثلّث القائم الزّاوية) ، فإنّ ناتج مربّع الضّلع الواحد من ضلعين الزّاوية المقابلة للوتر ، مجموعًا إليه

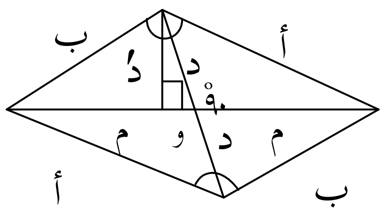
مربّع الضّلع الأخر ، يساوي ناتج ضعف مربّع نصف الوتر الواحد ، مجموعًا إليه ناتج ضعف مربّع نصف الوتر الأخر .

التّطبيق٢ : وبتكميل الشّكل ١ ، بشكله الكامل متوازي أضلاع ، وبرسم وتره الأخر ، وبرسم ضلعٍ من الزّاوية المنفرجة ، قائمًا على الوتر ونسميه بـــ د ، ونسمي المسافة مابين نقطة تقاطع كلًّا من الضلعين د ، دُ مع الوتر ٢م : بـــ و شكل ٩

فنحصل على : وترين ينصف كلٌّ من وتريهما الأخر ؛ ونسمي :

كلٌّ قسم من قسمين الوتر جـ بـــ : م .

وكلٌّ قسم من قسمين الوتر الأخر بـــ : د . ونطبق المعادلة ٥ ؛ كالتّالي : : الشّكل ٩



أ^{٢} = دُ^{٢} + (م + و)^{٢} .... معادلة ١ .

ب^{٢} = دُ^{٢} + (م ـ و)^{٢}......... معادلة ٢ .

بجمع معادلة ١، معادلة ٢؛

ينتج : أ^{٢}+ ب^{٢} = ٢دُ^{٢} + ٢م^{٢} +٢و^{٢} ..... معادلة ٣ .

لكن : دُ^{٢}+ و^{٢} = د^{٢} $\Leftarrow$ ٢(دُ^{٢} + و^{٢}) = ٢د^{٢}

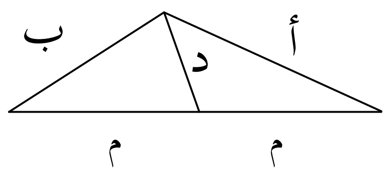
بالتّعويض بالمعادلة ٣

$أ^٢ + ب^٢ = ٢م^٢ + ٢د^٢$ .. معادلة ٤ ... نتاجها بالرّياضيّات الأساسيّة ؛ ومن الممكن تسمية إجراءاتها بالأبولّونيسيات .

النّتيجة : النّظريّة العامّة لأيّ مثلّث ؛ ألا وهيَ

نظريّة أبولونيس (APOLLONIUS)

النّظريّة رسمًا :



: الشكل ١٠

النّظريّة معادلةً : $أ^٢ + ب^٢ = ٢م^٢ + ٢د^٢$.

النّظريّة نصًا : بأيّ مثلّث (بما في ذلك المثلّث القائم الزّاوية) ، فإنّ ناتج مربّع الضّلع الواحد من ضلعين الزّاوية المقابلة للقطر ، مجموعًا إليه مربّع الضّلع الأخر ، يساوي ناتج ضعف مربّع نصف القطر الواحد ، مجموعًا إليه ناتج ضعف مربّع نصف القطر الأخر .

حسابيًا : $أ^٢ + ب^٢ = ٢(\frac{٢م}{٢})^٢ + ٢(\frac{٢د}{٢})^٢$.

إعداد : عصام أحمد خالد الكردي / أبو يونس .